

ISSN 2224-5227

2015 • 4

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ  
**БАЯНДАМАЛАРЫ**

**ДОКЛАДЫ**

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

**REPORTS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ЖУРНАЛ 1944 ЖЫЛДАН ШЫҒА БАСТАҒАН

ЖУРНАЛ ИЗДАЕТСЯ С 1944 г.

PUBLISHED SINCE 1944



Бас редактор  
ҚР ҰҒА академигі **М.Ж. Жұрынов**

Редакция алқасы:

хим.ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әдекенов С.М.** (бас редактордың орынбасары), эк.ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әділов Ж.М.**, мед. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Арзықұлов Ж.А.**, техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Бишімбаев У.К.**, а.-ш.ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Есполов Т.И.**, техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұтанов Г.М.**, физ.-мат.ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**, пед. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Пралиев С.Ж.**, геогр.ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Северский И.В.**; тарих.ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Сыдықов Е.Б.**, физ.-мат.ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**, физ.-мат.ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**, тарих ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбүсейітова М.Х.**, экон. ғ. докторы, проф., ҰҒА корр. мүшесі **Бейсембетов И.К.**, биол. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жамбакин К.Ж.**, тарих ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Кәрібаев Б.Б.**, мед. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Локшин В.Н.**, геол.-мин. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірсеріков М.Ш.**, физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.**, физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Садыбеков М.А.**, хим.ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Сатаев М.И.**; ҚР ҰҒА құрметті мүшесі, а.-ш.ғ. докторы, проф. **Омбаев А.М.**

Редакция кеңесі:

Украинаның ҰҒА академигі **Гончарук В.В.** (Украина), Украинаның ҰҒА академигі **Неклюдов И.М.** (Украина), Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **Гордиенко А.И.** (Беларусь), Молдова Республикасының ҰҒА академигі **Дука Г.** (Молдова), Тәжікстан Республикасының ҰҒА академигі **Илолов М.И.** (Тәжікстан), Қырғыз Республикасының ҰҒА академигі **Эркебаев А.Э.** (Қырғызстан), Ресей ҒА корр. мүшесі **Величкин В.И.** (Ресей Федерациясы); хим.ғ. докторы, профессор **Марек Сикорски** (Польша), тех.ғ. докторы, профессор **Потапов В.А.** (Украина), биол.ғ. докторы, профессор **Харун Парлар** (Германия), профессор **Гао Энджун** (КХР), филос. ғ. докторы, профессор **Стефано Перни** (Ұлыбритания), ғ. докторы, профессор **Богуслава Леска** (Польша), философия ғ. докторы, профессор **Полина Прокопович** (Ұлыбритания), профессор **Вуйцик Вольдемар** (Польша), профессор **Нур Изура Удзир** (Малайзия), д.х.н., профессор **Нараев В.Н.** (Ресей Федерациясы)

Главный редактор  
академик НАН РК **М.Ж. Журинов**

Редакционная коллегия:

доктор хим. наук, проф., академик НАН РК **С.М. Адекенов** (заместитель главного редактора), доктор экон. наук, проф., академик НАН РК **Ж.М. Адилов**, доктор мед. наук, проф., академик НАН РК **Ж.А. Арзыкулов**, доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **В.К. Бишимбаев**, доктор сельскохозяйств. наук, проф., академик НАН РК **Т.И. Есполов**, доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Г.М. Мутанов**, доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**, доктор пед. наук, проф., академик НАН РК **С.Ж. Пралиев**, доктор геогр. наук, проф., академик НАН РК **И.В. Северский**; доктор ист. наук, проф., академик НАН РК **Е.Б. Сыдыков**, доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**, доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**, доктор ист. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Х. Абусейтова**, доктор экон. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **И.К. Бейсембетов**, доктор биол. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **К.Ж. Жамбакин**, доктор ист. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Б.Б. Карибаев**, доктор мед. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Локшин**, доктор геол.-мин. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Ш. Омирсериков**, доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов**, доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.А. Садыбеков**, доктор хим. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.И. Сатаев**; почетный член НАН РК, доктор сельскохозяйств. наук, проф., **А.М. Омбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **Гончарук В.В.** (Украина), академик НАН Украины **И.М. Неклюдов** (Украина), академик НАН Республики Беларусь **А.И.Гордиенко** (Беларусь), академик НАН Республики Молдова **Г. Дука** (Молдова), академик НАН Республики Таджикистан **М.И. Илолов** (Таджикистан), член-корреспондент РАН **Величкин В.И.** (Россия); академик НАН Кыргызской Республики **А.Э. Эркебаев** (Кыргызстан), д.х.н., профессор **Марек Сикорски** (Польша), д.т.н., профессор **В.А. Потапов** (Украина), д.б.н., профессор **Харун Парлар** (Германия), профессор **Гао Энджун** (КНР), доктор философии, профессор **Стефано Перни** (Великобритания), доктор наук, профессор **Богуслава Леска** (Польша), доктор философии, профессор **Полина Прокопович** (Великобритания), профессор **Вуйцик Вольдемар** (Польша), профессор **Нур Изура Удзир** (Малайзия), д.х.н., профессор **В.Н. Нараев** (Россия)

«Доклады Национальной академии наук Республики Казахстан» ISSN 2224-5227

Собственник: Республиканское общественное объединение «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5540-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год. Тираж: 2000 экземпляров

Адрес редакции: 050010, г.Алматы, ул.Шевченко, 28, ком.218-220, тел. 272-13-19, 272-13-18

<http://nauka-nanrk.kz>, [reports-science.kz](http://reports-science.kz)

Адрес типографии: ИП «Аруна», г.Алматы, ул.Муратбаева, 75

©Национальная академия наук Республики Казахстан, 2015 г.

E d i t o r i n c h i e f

**M.Zh. Zhurinov**, academician of NAS RK

Editorial board:

**S.M. Adekenov** (deputy editor in chief), Doctor of Chemistry, prof., academician of NAS RK; **Zh.M. Adilov**, Doctor of Economics, prof., academician of NAS RK; **Zh.A. Arzykulov**, Doctor of Medicine, prof., academician of NAS RK; **V.K. Bishimbayev**, Doctor of Engineering, prof., academician of NAS RK; **T.I. Yespolov**, Doctor of Agriculture, prof., academician of NAS RK; **G.M. Mutanov**, Doctor of Physics and Mathematics, prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, Doctor of Physics and Mathematics, prof., academician of NAS RK; **S.Zh. Praliyev**, Doctor of Education, prof., academician of NAS RK; **I.V. Seversky**, Doctor of Geography, prof., academician of NAS RK; **Ye.B. Sydykov**, Doctor of Historical Sciences, prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, Doctor of Physics and Mathematics, prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, Doctor of Physics and Mathematics, prof., academician of NAS RK; **M.Kh. Abuseitova**, Doctor of Historical Sciences, prof., corr. member of NAS RK; **I.K. Beisembetov**, Doctor of Economics, prof., corr. member of NAS RK; **K.Zh. Zhambakin**, Doctor of Biological Sciences, prof., corr. member of NAS RK; **B.B. Karibayev**, Doctor of Historical Sciences, prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Lokshin**, Doctor of Medicine, prof., corr. member of NAS RK; **M.Sh. Omirserikov**, Doctor of Geology and Mineralogy, prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, Doctor of Physics and Mathematics, prof., corr. member of NAS RK; **M.A. Sadybekov**, Doctor of Physics and Mathematics, prof., corr. member of NAS RK; **M.I. Satayev**, Doctor of Chemistry, prof., corr. member of NAS RK; **A.M. Ombayev**, Honorary Member of NAS RK, Doctor of Agriculture, prof.

Editorial staff:

**V.V. Goncharuk**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **I.M. Neklyudov**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.I. Gordienko**, NAS RB academician (Belarus); **G. Duca**, NAS Moldova academician (Moldova); **M.I. Iolov**, NAS Tajikistan academician (Tajikistan); **A.E. Erkebayev**, NAS Kyrgyzstan academician (Kyrgyzstan); **V.I. Velichkin**, RAS corr.member (Russia); **Marek Sikorski**, Doctor of Chemistry, prof. (Poland); **V.A. Potapov**, Doctor of Engineering, prof. (Ukraine); **Harun Parlar**, Doctor of Biological Sciences, prof. (Germany); **Gao Endzhun**, prof. (PRC); **Stefano Perni**, Doctor of Philosophy, prof. (UK); **Boguslava Leska**, dr, prof. (Poland); **Pauline Prokopovich**, Doctor of Philosophy, prof. (UK); **Wójcik Waldemar**, prof. (Poland), **Nur Izura Udzir**, prof. (Malaysia), **V.N. Narayev**, Doctor of Chemistry, prof. (Russia)

**Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.**

ISSN 2224-5227

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of Information and Archives of the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan N 5540-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 2000 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of.219-220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,

<http://nauka-nanrk.kz/> [reports-science.kz](http://reports-science.kz)

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2015

## Analysis of convergence and limit of the amount of functional series for fractional composition of materials in successive destruction

V.P. Malyshev, Yu.S. Zubrina, D.A. Kaikenov, A.M. Makasheva  
Chemical and metallurgical institute named after Zh. Abishev, Karaganda  
[eia\\_hmi@mail.ru](mailto:eia_hmi@mail.ru)

**Key words:** convergence, functional series, analysis, destruction, probabilistic and deterministic model, sum of the series.

**Abstract.** Probabilistic and deterministic model of sequential destruction of materials is a series of functions, definable not only by the multiplicity of grinding but also the impact of the set (about 15) factors. Probabilistic component summarizes the rate constant for each fraction of the material, and deterministic component accounts not only the destruction, but also the replenishment of the fraction due to the formation of fragments from the previous fractions. Convergence of this functional series is grounded for convergence of its constituent simpler series relating to changes in the geometric size fractions and the rate constant. Limit of the amount of functional series is exactly equal to unity for any variations in the parameters of destruction, due originally equality to unit of initial fractional composition and analytical accounting sequential transmutability fractions. The obtained results was confirmed by the calculations for working conditions of industrial mills and the first time characterizes this probabilistic-deterministic model as guaranteed the strict observance of the balance of the fractions to the extent of the process.

УДК 51+622.73

## Анализ сходимости и предела суммы функционального ряда для фракционного состава материалов при последовательной деструкции

В.П. Малышев, Ю.С. Зубрина, Д.А. Кайкенов, А.М. Макашева  
Химико-металлургический институт имени Ж. Абишева  
[eia\\_hmi@mail.ru](mailto:eia_hmi@mail.ru)

**Ключевые слова:** сходимости, функциональный ряд, анализ, деструкция, вероятностно-детерминированная модель, сумма ряда.

**Аннотация.** Вероятностно-детерминированная модель последовательной деструкции материалов представляет собой функциональный ряд, определяемый помимо кратности измельчения воздействием множества (порядка 15) факторов. Вероятностная составляющая обобщает константу скорости процесса для каждой фракции материала, а детерминированная учитывает не только деструкцию, но и пополнение фракции за счет образования осколков от предыдущих фракций. Сходимость данного функционального ряда обоснована по сходимости входящих в него более простых рядов, относящихся к изменению геометрического размера фракций и константы скорости процесса. Помимо этого установлено, что предел суммы функционального ряда строго равен единице при любой вариации параметров деструкции ввиду изначально заданного равенства единице исходного фракционного состава и аналитического учета последовательной превращаемости фракций. Полученные результаты подтверждены расчетами для условий работы промышленных мельниц и впервые характеризуют данную вероятностно-детерминированную модель как гарантирующую строгое соблюдение баланса фракций по мере протекания процесса.

В работах [1-3] представлена вероятностно-детерминированная модель измельчения материалов, которая впервые позволила рассчитывать полный фракционный состав ( $P_n$ , доли единицы) в любой момент времени в зависимости от достаточно полного числа действующих факторов:

$$P_n = f(d_{1...n}, \gamma_3, G_3, d_{ш}, \gamma_{ш}, G_{ш}, \gamma_6, G_6, D, \omega, E_a, M, T, P_{01...0n}, \tau), \quad (1)$$

где  $d_{1...n}$  – средние размеры измельчаемых фракций, м;  $\gamma_3$  – плотность зернового материала фракций, кг/м<sup>3</sup>;  $G_3$  – масса зернового материала в мельнице, кг;  $d_{ш}$  – диаметр мелющих тел (шаров), м;  $\gamma_{ш}$  – плотность материала шаров, кг/м<sup>3</sup>;  $G_{ш}$  – масса шаровой загрузки, кг;  $\gamma_6$  – плотность воды, кг/м<sup>3</sup>;  $G_6$  – масса воды мельнице, кг;  $D$  – внутренний диаметр мельницы, м;  $\omega$  – частота вращения мельницы, с<sup>-1</sup>;  $E_a$  – энергия активации разрушения зерен, Дж/моль;  $T$  – абсолютная температура, К;  $P_{01...0n}$  – исходный фракционный состав измельчаемого материала, доли единицы (д.е.);  $\tau$  – продолжительность процесса, с.

Вероятностная составляющая рассматриваемой модели основана на обобщенном вероятностном представлении процесса и скорости соударений при превращениях взаимодействующих тел в химических, механических и любых подобных системах [4-6]:

$$v = Z P_{\text{конц}} P_{\text{ст}} P_a, \quad (2)$$

где  $Z$  – частота соударения;  $P_{\text{конц}}$  – вероятность совместного обнаружения взаимодействующих тел в любом элементарном объеме реакционного пространства (концентрационный фактор);  $P_{\text{ст}}$  – вероятность наиболее эффективной взаимной ориентации взаимодействующих тел (стерический фактор);  $P_a$  – вероятность разрушения материала путем преодоления энергетического барьера активации (активационный фактор).

Раскрытие вероятностных факторов через параметры работы мельницы (1) приводит к выражению константы разрушения для фракции со средним размером зерен  $d_n$

$$k_n = \frac{8 \left[ (d_n/d_{ш}) - (d_n/d_{ш})^2 \right] \omega G_{ш} G_3}{(1 - 2\omega\sqrt{2D/g}) (G_{ш}/\gamma_{ш} + G_3/\gamma_3 + G_6/\gamma_6)^2 \gamma_{ш} \gamma_3} \exp \left( - \frac{E_a}{RT + MgD(\gamma_{ш}/\gamma_3)(d_{ш}/d_n)^3} \right), \text{с}^{-1}, \quad (3)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести, м/с<sup>2</sup>;  $R$  – универсальная газовая постоянная, Дж/(моль · К).

Детерминированная составляющая модели получается при строгом решении системы из  $n$  дифференциальных уравнений, учитывающих не только скорость разрушения, но и накопления  $n$ -ой фракции за счет осколков от предыдущих фракций

$$\frac{dP_n}{d\tau} = k_{n-1} P_{n-1} - k_n P_n. \quad (4)$$

При этом удалось найти выражение для общего члена функционального ряда [7-9]:

$$P_n = P_{0n} e^{-k_n \tau} + \sum_{j=1}^{n-1} P_{0j} \prod_j^{n-1} k_j \sum_j^n \frac{e^{-k_j \tau}}{\prod_{\substack{j,i=1 \\ i \neq j}}^n (k_i - k_j)}, \text{д.е.} \quad (5)$$

Здесь первое слагаемое учитывает убыль  $n$ -ой фракции в результате собственного разрушения, а второе слагаемое фиксирует накопление осколков размером  $d_n$  за счет разрушения предыдущих, более крупных фракций.

#### Анализ сходимости и суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$

Непосредственный анализ сходимости и предела суммы данного ряда представляется затруднительным, как это вообще характерно для функциональных рядов [10], однако возможен предварительный анализ встроенных в этот ряд мажорантных рядов (по признаку Вейерштрасса). Первая мажоранта относится к последовательности изменения размера фракций, которая может быть выражена формулой для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$

$$d_{n+1} = d_n/q, \quad (6)$$

где  $q = \text{const} > 1$ , т.к. разрушение зерен сопровождается уменьшением их размера. Общий член ряда, представленный через размер самой крупной (первой) фракции,

$$d_n = d_1/q^{n-1} \quad (7)$$

удовлетворяет необходимому признаку сходимости Коши

Достаточный признак сходимости Даламбера также соблюдается (8)

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{d_1 q^n}{d_1 q^{n+1}} = \frac{1}{q} < 1. \quad (9)$$

Более сложной является вторая мажоранта, выражаемая последовательностью констант скорости измельчения  $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ . В ней варьируемым параметром при прочих равных условиях является  $d_n$ , и если объединить прочие параметры соответствующими постоянными величинами  $a, c, f$ , то выражение (3) сведется к виду

$$k_n = a[(d_n/d_{\text{ш}}) - (d_n/d_{\text{ш}})^2] \exp\left[-\frac{E_a}{c+f(d_{\text{ш}}/d_n)^3}\right]. \quad (10)$$

Условием сохранения положительных значений  $k_n$  является  $d_n < d_{\text{ш}}$ , причем по мере измельчения  $d_n \rightarrow 0$  согласно (8), поэтому для старших членов ряда вычитаемым  $(d_n/d_{\text{ш}})^2$  можно пренебречь. В экспоненте второе слагаемое знаменателя, напротив, приобретает доминирующее значение, стремясь к бесконечности, ввиду  $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_{\text{ш}}/d_n)^3 = (d_{\text{ш}}/0)^3 = \infty$ . При этом предельное выражение для экспоненты примет форму

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left[-\frac{E_a}{c+f(d_n/d_{\text{ш}})^3}\right] = \exp\left[-\frac{E_a}{\infty}\right] = 1$$

С учетом полученных упрощений для старших членов ряда формула (10) редуцируется до вида

$$k_n = a d_n / d_{\text{ш}}. \quad (12)$$

По признаку Коши ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$  сходится, т.к.  $d_n \rightarrow 0$ :

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a d_n / d_{\text{ш}}) = 0,$$

что подтверждается и признаком Даламбера (с учетом (9)):

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{a d_{n+1} / d_{\text{ш}}}{d_{\text{ш}} a d_n} = \frac{d_{n+1}}{d_n} < 1.$$

С учетом сходящихся мажорантных рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$  можно проанализировать сходимость основного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  (5). Для старших членов ряда по признаку Коши первое слагаемое ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  является сходящимся:

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{0n} e^{-k_n \tau}) = 0 e^{-0\tau} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Необходимо пояснить, что начальный фракционный состав, каким бы произвольным он не задавался в интервале суммы, равной единице, при пользовании формулой (5) всегда дополняется старшими членами, равными нулю, число которых определяется принятой точностью расчета  $P_n$  и в принципе устремлено в бесконечность.

Ввиду заданности условия  $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0n} = 1$  первое слагаемое ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ , а именно  $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0n} e^{-k_n \tau}$ , является сходящимся, т.к. отображает суммарную убыль каждой фракции во времени, и для любой  $\tau$   $P_{0n} e^{-k_n \tau} \leq P_{0n}$ , ввиду чего  $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0n} e^{-k_n \tau} \leq 1$ .

Во втором слагаемом ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  анализ старших членов позволяет сделать следующее. Этот ряд представляет собой сумму произведений констант скоростей в виде основного фрагмента

$$\sum_{j=1}^{n-1} P_{0j} \prod_j^{n-1} k_j,$$

и поскольку при  $n \rightarrow \infty$   $k_{n-1} \rightarrow 0$  ввиду условия (13), то за счет этого каждое слагаемое  $P_{0j} \prod_j^{n-1} k_j$  обнуляется и сама сумма стремится к нулю.

Таким образом, признак сходимости Коши для этого слагаемого ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ , как и для первого слагаемого, соблюдается. Что касается признака Даламбера, то в данном случае обоснование его представляется затруднительным из-за необходимости рассмотрения по крайней мере предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} P_{0j} \prod_j^{n-1} k_j}{\sum_{j=1}^{n-2} P_{0j} \prod_j^{n-2} k_j}.$$

Однако сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  может быть обоснована непосредственно через сумму этого ряда, которая однозначно определяется задаваемой суммой начального содержания фракций, строго равной единице,  $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0n} = 1$ . Это строгое равенство единице соблюдается при дальнейших превращениях ввиду аналитического решения системы дифференциальных уравнений (4), обеспечивающего строгое соответствие уменьшения доли предыдущего класса  $P_{n-1}$  приращению предыдущего класса  $P_n$  с константой интегрирования, содержащей величину  $P_{0n}$  для каждой строки системы [7]. Другими словами, строгая детерминация последовательной деструкции вещества путем решения системы дифференциальных уравнений дает результат, адекватный закону сохранения исходной суммы содержания фракций для любой полноты превращений этих фракций.

Более того, исходное содержание может быть задано непосредственно в размерных единицах массы, объема или процентах, и это не изменит строгости решения системы дифференциальных уравнений по этим переменным. Таким образом, сумма рассматриваемого функционального ряда может быть выражена как

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_{0n}. \quad (16)$$

Но доленое представление исходных данных и конечных результатов является более универсальным. Оно становится необходимым, если использовать фракционный состав для расчета энтропии измельчения по динамике изменения долевого содержания фракций [8]. Поскольку любое размерное представление множества можно выразить через доленое с помощью постоянного коэффициента пропорциональности, то сходимость размерного ряда сохраняется, если обеспечена сходимость долевого.

### Расчетная часть

С целью проверки и иллюстрации полученных результатов воспользуемся разработанной вероятностно-детерминированной моделью (4), (5) применительно к сухому измельчению монофракции кварцевой руды, т.е. при  $P_{01} = 1$ ,  $P_{02... \infty} = 0$ , с характеристиками  $d_1 = 0,01$  м,  $M_{SiO_2} = 0,0601$  кг/моль,  $\gamma_3 = 2650$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_a = \Delta H_m = 9170$  Дж/моль. В качестве промышленного образца взяты характеристики мельницы Жезказганской обогатительной фабрики МШЦ 3,6×4,0:  $d_{ш} = 0,06$  м,  $m = 0,883$  кг,  $\gamma_{ш} = 7874$  кг/м<sup>3</sup>,  $G_{ш} = 60000$  кг,  $\gamma_3 = 2650$  кг/м<sup>3</sup>,  $G_3 = 18760$  кг,  $w = 0,267$  с<sup>-1</sup>,  $G_B = 0$  кг,  $\gamma_B = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $D = 3,36$  м. Другие постоянные:  $T = 298$  К,  $R = 8,31441$  Дж/(моль·К),  $g = 9,807$  м/с<sup>2</sup>. Типичные условия последовательного разрушения зерен согласно [11] подчиняются образованию каждый раз восьми осколков, что эквивалентно уменьшению диаметра в два раза

$$d_n = d_1 (1/2)^{n-1}. \quad (17)$$

Результаты расчета приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Зависимости константы скорости измельчения  $k_n$  и выхода фракции  $P_n$  от размера зерна  $d_n$  и продолжительности  $\tau$

n	$d_n, \text{ м}$	$k_n, \text{ с}^{-1}$	$P_n$ при $\tau, \text{ с}$							
			0	60	120	180	240	600	1200	3600
1	0,01	$2,687 \cdot 10^{-3}$	1	0,851	0,724	0,617	0,525	0,199	0,040	0
2	0,005	$8,346 \cdot 10^{-3}$	0	0,116	0,170	0,187	0,185	0,092	0,019	0
3	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$1,192 \cdot 10^{-2}$	0	0,026	0,066	0,097	0,115	0,079	0,017	0
4	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$7,334 \cdot 10^{-3}$	0	0,006	0,031	0,069	0,107	0,153	0,043	0
5	$6,25 \cdot 10^{-4}$	$3,799 \cdot 10^{-3}$	0	0,001	0,008	0,026	0,056	0,242	0,150	0
6	$3,125 \cdot 10^{-4}$	$1,915 \cdot 10^{-3}$	0	0	0,001	0,004	0,012	0,177	0,337	0,013
7	$1,562 \cdot 10^{-4}$	$9,605 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0	0,001	0,052	0,291	0,159
8	$7,812 \cdot 10^{-5}$	$4,809 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0	0	0,006	0,092	0,428
9	$3,906 \cdot 10^{-5}$	$2,406 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0	0	0	0,011	0,316
10	$1,953 \cdot 10^{-5}$	$1,203 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0	0	0	0,001	0,077
11	$9,766 \cdot 10^{-6}$	$6,018 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0	0	0	0	0,007
12	$4,883 \cdot 10^{-6}$	$3,009 \cdot 10^{-5}$	0	0	0	0	0	0	0	0
13	$2,441 \cdot 10^{-6}$	$1,505 \cdot 10^{-5}$	0	0	0	0	0	0	0	0
14	$1,221 \cdot 10^{-6}$	$7,524 \cdot 10^{-6}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Sigma$	–	–	1	1,000	1,000	1,000	1,001	1,000	1,001	1,000

Все три ряда,  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n, \sum_{n=1}^{\infty} k_n, \sum_{n=1}^{\infty} P_n$ , являются сходящимися по критерию Коши, т.к. во всех случаях старшие члены ряда устремляются к нулю. По признаку Даламбера первый ряд дает отношение

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{1}{2} < 1$$

для всех смежных членов ряда и, как известно для суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-1} = 2$ , сходится, имея предел с учетом (17)  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = 2d_1$ . Второй ряд в области младших членов имеет максимум при  $n=3$ , но затем по мере возрастания  $n$  образует зависимость:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$k_{n+1}/k_n$	0,615	0,518	0,504	0,502	0,501	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500 < 1,

чем подтверждается его сходимость. Однако сумму ряда в общем случае аналитически выразить затруднительно, поскольку для младших членов приближения, использованные при анализе старших членов, являются недействительными. Вообще каждый раз определение суммы ряда требует творческого решения и не имеет строгого алгоритма, как, впрочем, и взятие интегралов.

Это особенно наглядно отображается характером рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  при различной продолжительности процесса. Во всех случаях члены ряда устремляются к нулю, изменяясь при возрастании  $n$  от монотонно убывающей зависимости через переходную к экстремальной и затем к логарифмически нормальному распределению. Что касается предела отношения  $P_{n+1}/P_n$ , то оно не может быть выражено определенным числом ввиду сложной зависимости не только от  $n$ , но и от  $\tau$ , что вообще характерно для функциональных рядов, а тем более для ряда с функцией вида (1). Поэтому в данном случае необходимым и достаточным условием сходимости ряда является аналитически обусловленное равенство  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$ .

Общий вид зависимости  $P_n = f(n, \tau)$  при вышеуказанных условиях представлен на рис. 1.

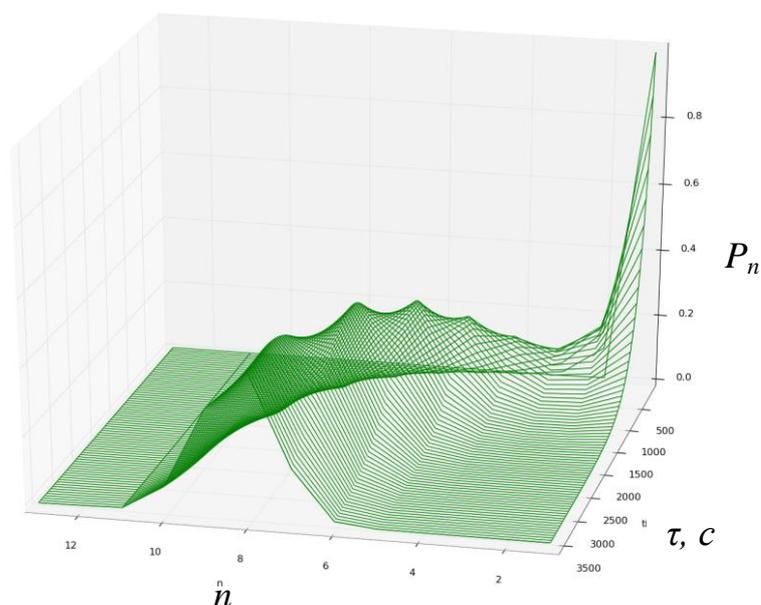


Рисунок 1 – Зависимость фракционного состава ( $P_n$ ) от кратности  $n$  и продолжительности измельчения зерна ( $\tau, c$ )

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Малышев В.П. Новый аспект в теории измельчения руд и управления этим процессом // Обогащение руд. – 1995. – № 4-5. – С. 4-14.
- [2] Малышев В.П., Турдукожаева А.М., Кайкенов Д.А. Развитие теории измельчения руд на основе молекулярной теории соударений и формальной кинетики последовательных реакций // Обогащение руд. – 2012. – № 4. – С. 29-35.
- [3] Малышев В.П., Макашева А.М., Бектурганов Н.С., Токбулатов Т.Е., Кравченко В.Г., Кайкенов Д.А. Использование вероятностной модели измельчения для анализа и прогнозирования работы промышленной мельницы // Обогащение руд. – 2014. – N4. – С. 3-7.
- [4] V.P. Malyshev, A.M. Turdukozhaeva (Makasheva). What Thunder There and is not Heard When Using Ball Mills? // Journal of Materials Science and Engineering A. – 2013. – № 2. – V. 3. – P. 131-144.
- [5] Малышев В.П. молекулярный шарм и гремящее торнадо барабанных шаровых мельниц // Энциклопедия инженера-химика. – 2013. N9. – с. 54-59; V10. – к. 56-60; N11. – с. 44-52.
- [6] Malyshev V.P., Makasheva A.M. Unated nature and model chemical and mechanical reactions of consecutive destruction of substance/ Theoretical and experimental Chemistry. Abstracts of the V-th International science conference. – Karaganda, 2014. P. 31
- [7] Малышев В.П., Турдукожаева А.М., Кайкенов Д.А. Разработка математической модели последовательной деструкции вещества методом прямого интегрирования // Доклады НАН РК. – 2012. – № 4. – С. 5-13.
- [8] Малышев В.П., Турдукожаева (Макашева) А.М., Бектурганов Н.С., Кайкенов Д.А. Логарифмически нормальное распределение фракций при измельчении материалов как аттрактор в вероятностной модели процесса // ДАН РК. – 2013. – № 6. – С. 46-53.
- [9] Малышев В.П., Макашева А.М., Зубрина Ю.С. Общий вид интегралов при разложении сложной дробной функции на элементарные // ДАН РК. – 2014. – №6. – с. 11-14.
- [10] Яу Ш., Надис С. Теория струн и скрытые измерения Вселенной. – СПб.: Питер, 2014. – с. 147.
- [11] Ходаков Г.С. Физика измельчения. – М.: Наука, 1972. 308 с.

REFERENCES

- [1] Malyshev V.P. Novyj aspekt v teorii izmel'chenija rud i upravlenija jetim processom // Obogashhenie rud. – 1995. – № 4-5. – P. 4-14. (in Russ).
- [2] Malyshev V.P., Turdukozhayeva A.M., Kajkenov D.A. Razvitie teorii izmel'chenija rud na osnove molekuljarnoj teorii soudarenij i formal'noj kinetiki posledovatel'nyh reakcij // Obogashhenie rud. – 2012. – № 4. – P. 29-35. (in Russ).
- [3] Malyshev V.P., Makasheva A.M., Bekturganov N.S., Tokbulatov T.E., Kravchenko V.G., Kajkenov D.A. Ispol'zovanie verojatnostnoj modeli izmel'chenija dlja analiza i prognozirovaniya raboty promyshlennoj mel'nicy // Obogashhenie rud. – 2014. – № 4. – P. 3-7. (in Russ).
- [4] V.P. Malyshev, A.M. Turdukozhayeva (Makasheva). What Thunder There and is not Heard When Using Ball Mills? // Journal of Materials Science and Engineering A. – 2013. – № 2. – V. 3. – P. 131-144. (in Eng.).
- [5] Malyshev V.P. molekuljarnyj sharm i gremjashhee tornado barabannyh sharovyh mel'nic // Jenciklopedija inzhenerahimika. – 2013. N9. – p. 54-59; V10. – k. 56-60; N11. – p. 44-52. (in Russ).
- [6] Malyshev V.P., Makasheva A.M. Unated nature and model chemical and mechanical reactions of consecutive destruction of substance/ Theoretical and experimental Chemistry. Abstracts of the V-th International science conference. – Karaganda, 2014. P. 31. (in Eng.).
- [7] Malyshev V.P., Turdukozhayeva A.M., Kajkenov D.A. Razrabotka matematicheskoy modeli posledovatel'noj destrukcii veshhestva metodom prjamoogo integrirovaniya // Doklady NAN RK. – 2012. – № 4. – P. 5-13. (in Russ).
- [8] Malyshev V.P., Turdukozhayeva (Makasheva) A.M., Bekturganov N.S., Kajkenov D.A. Logarifmicheski normal'noe raspredelenie frakcij pri izmel'chenii materialov kak attraktor v verojatnostnoj modeli processa // DAN RK. – 2013. – № 6. – P. 46-53. (in Russ).
- [9] Malyshev V.P., Makasheva A.M., Zubrina Ju.S. Obshhij vid integralov pri razlozhenii slozhnoj drobnnoj funkicii na jelementarnye // DAN RK. – 2014. – № 6. – p. 11-14. (in Russ).
- [10] Jau Sh., Nadis S. Teorija strun i skrytye izmerenija Vselennoj. – SPb.: Piter, 2014. – p. 147. (in Russ).
- [11] Hodakov G.S. Fizika izmel'chenija. – M.: Nauka, 1972. 308p. (in Russ).

**ДӘЙЕКТІ ДЕСТРУКЦИЯ КЕЗІНДЕГІ МАТЕРИАЛДАРДЫҢ ФРАКЦИЯЛЫҚ ҚҰРАМЫНА АРНАЛҒАН ҚЫЗМЕТТІК ҚАТАР ЖИНАҚТЫЛЫҒЫ МЕН СОММАСЫ ШЕГІНІҢ ТАЛДАУЫ**

**В.П.Мальшев, Ю.С.Зубрина, Д.А.Кайкенов, А.М.макашева**  
Ж.Әбішев атындағы химия-металлургия институты  
[eia\\_hmi@mail.ru](mailto:eia_hmi@mail.ru)

**Тірек сөздер:** жинақтылық, функционалдық қатарды, талдау, деструкция, ықтималды-детерминді моделі, қатарды соммасы.

**Аннотация.** Материалдардың дәйекті деструкциясының ықтималды-детерминді моделі ұсақталу еселігінен басқа көптеген (шамамен 15) фактордың әсерімен анықталатын қызметтік қатар болып табылады. Ықтимал құрамдас бөлік материалдың әрбір фракциясы үшін үрдіс жылдамдығының константасын жалпыласа, детерминді құрамдас бөлік тек қана деструкцияны ғана емес, бұған дейінгі фракциялардан пайда болған сынықтардың есебінен фракциялардың толығын да есепке алады. Аталған қызметтік қатардың жинақтылығы құрамындағы фракциялардың геометриялық өлшемі мен үрдіс жылдамдығы константасының өзгеруіне жататын едәуір жай қатарлардың жинақтылығымен негізделген. Бұдан басқа қызметтік қатар соммасының шегі деструкция өлшемдерінің кез келген өзгеруі кезінде шығыс фракциялық құрам мен фракциялардың дәйекті өзгеруінің аналитикалық есебінің бастапқыдан белгіленген бірлікке теңдігінен дәл бірлікке тең екендігі анықталған. Алынған нәтижелер өнеркәсіптік диірмендердің жұмыс істеу жағдайларының есебімен расталған және алғаш рет жоғарыда айтылған ықтималды-детерминді модельді үрдістің өту шамасына қарай фракциялар тепе-теңдігін қатаң түрде сақталуына кепілдік ретінде сипаттайды.

Поступила 16.07.2015 г.

**PUBLICATION ETHICS AND PUBLICATION MALPRACTICE  
IN THE JOURNALS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the work described has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the originality detection service Cross Check <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.reports-science.kz/index.php/ru/>

Редакторы *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов*  
Верстка на компьютере *С.К. Досаевой*

Подписано в печать 11.08.2015.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
15,7 п.л. Тираж 2000. Заказ 4.